„Müssen wir das wirklich noch beweisen?“ – Sinnstiftende Implementierung von Begründungen im Mathematikunterricht

MELANIE HUNGER, WIEN

Immer wieder werden Klagen über fehlende Motivation von Schüler*innen bezüglich mathematischer Beweise laut. Dass der Erwerb von Begründungs- und Argumentationskompetenzen nicht nur ein kognitives Problem ist, wird in der fachdidaktischen Literatur regelmäßig thematisiert. In diesem Beitrag wird diese Schwierigkeit aus verschiedenen theoretischen Perspektiven beleuchtet. Vier didaktische Aufträge für Lehrpersonen werden daraus abgeleitet und konkrete Unterrichtsvorschläge zu deren Umsetzung im Mathematikunterricht diskutiert.

1 Problemstellung

Für die Vermittlung eines authentischen Bildes von Mathematik in der Schule ist eine konsequente Einbindung von Begründungen, Argumentationen und Beweisen in den Mathematikunterricht essenziell. Allerdings weisen einige Studien daraufhin, dass Schüler*innen Schwierigkeiten haben, den Sinn dieser fachtypischen Prozesse zu erkennen. So beobachtet Andelfinger (1988) beispielsweise, dass viele Lernende der Sekundarstufe geometrische Inhalte vollkommen losgelöst von den jeweiligen Beweisen erleben. Für sie kann die Geometrie als Lehre räumlicher Figuren auch ohne zusätzliche „Beweislast“ existieren. Dass viele Schüler*innen den Beweis als sinnentleertes Ritual wahrnehmen, bestätigen die Ergebnisse von Healy und Hoyles (2000). Sie befragten beinahe 2 500 leistungsstarke Schüler*innen im Alter von 14-15 Jahren. Ein Viertel davon konnte dem Beweisen keine Funktion zuschreiben. Die Rolle und Sinnhaftigkeit dieses zentralen Elements der Mathematik bleibt vielen Schüler*innen also gänzlich verborgen.

Für die Überprüfung des Wahrheitsgehalts einer Aussage ziehen viele Lernende andere Verfahren vor. Die Überwindung des Stadiums des „naiven Empiristen“ (Wittmann 2014) stellt eine besonders schwierige didaktische Herausforderung dar. Das Anführen einiger Beispiele oder das visuelle Überprüfen an einer Skizze sind für sie wesentlich überzeugendere Verfahren für die Beurteilung einer Aussage als deduktive Argumentationen. Fischbein und Kedem (1982) konnten zeigen, dass viele High School Schüler*innen auch nach der Präsentation eines deduktiven Beweises das Bedürfnis verspüren, die in Frage stehende Aussage zusätzlich anhand empirischer Daten zu überprüfen. Diese Akzeptanz gegenüber empirischen Argumenten steht erstaunlicherweise nicht in Widerspruch zur Fähigkeit, selbst deduktive Beweise zu führen, wie Kunimune, Fujita, und Jones (2009) feststellen mussten. Coe und Ruthven (1994) kamen zu ähnlichen Ergebnissen. Sie legten dar, dass deduktive Argumente nur eine geringe Überzeugungskraft auf Lernende haben. Sie stellten fest, dass selbst wenn Mathematikstudierende formulieren, dass ein mathematischer Beweis notwendig ist, um eine mathematische Aussage zu verifizieren, dieser noch keine überzeugende Wirkung auf sie haben muss.

Diese ausgewählten Forschungsergebnisse zeigen in der Zusammenschau auf, dass sich Sinnstiftung für das Begründen und Argumentieren im Mathematikunterricht nicht von allein einstellt. Die Internalisierung der Bedeutung dieser mathematischen Praxis ist eine wünschenswerte Entwicklung, für die es aktive Unterstützungsangebote von Lehrkräften geben sollte. Dass dieses Ziel zwar ambitioniert, aber nicht unerreichbar ist, zeigt das folgende Fazit einer Studie von Herbst und Brach (2006, S. 117):

> „It was important to see that our participants did not perceive proof as completely disconnected from substance. For some of them it clearly was a tool to understand and remember past knowledge, as well as an exercise in logic; it was also related to explaining. They did not think that doing proofs was useless, patronizing, or boring; they did not complain about abstractness; and many said that geometry gave them more of an opportunity to think than algebra.“

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 53, 2021, S. 35 - 56.

2 Didaktische Ziele und Aufgaben

Heinrich Winter (1983) unterscheidet zwischen kognitivem und subjektivem Beweisbedürfnis. Das kognitive Beweisbedürfnis ist die Einsicht, dass ein mathematischer Satz eines fachlichen Beweises bedarf. Das subjektive Beweisbedürfnis spricht eine emotionale Disposition der Lernenden an. Sie haben dann ein persönliches Interesse daran, einen Beweis für eine Aussage zu hören, sehen oder selbst zu entwerfen. In Anlehnung an die Interessensforschung lässt sich zusätzlich zwischen situativem und individuellem Beweisbedürfnis unterscheiden. Ersteres bezieht sich auf ein konkretes mathematisches Phänomen, letzteres auf eine zeitlich anhaltende Einstellung einer Person zur mathematischen Praxis des Beweisens.

Diese Unterteilung ergibt vier Bereiche des Beweisbedürfnisses, die eng miteinander verknüpft sind. In Abb. 1 wird für jedes dieser vier Konstrukte eine Aussage ausformuliert, die für eine – aus didaktischer Sicht – wünschenswerte Einstellung prototypisch ist.

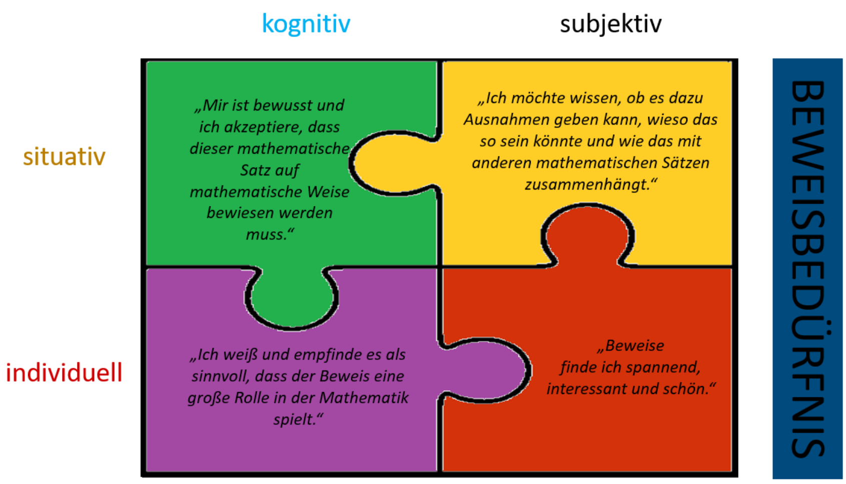


Abb. 1: Vier Subkonstrukte des Beweisbedürfnisses

Wie im ersten Abschnitt dargelegt, stellen sich solche positiven Geisteshaltungen nicht ohne pädagogische Bemühungen ein. Es lassen sich konkrete didaktische Anforderungen an den Mathematikunterricht ableiten, um eine Sinnstiftung bezüglich beweisspezifischer Prozesse zu ermöglichen. Tabelle 1 zeigt eine Auflistung der vier angestrebten Einstellungen und entsprechende didaktische Desiderate. Dazu soll angemerkt werden, dass die Bewältigung dieser vier Herausforderungen zwar notwendig, aber mit Sicherheit nicht hinreichend für die sinnstiftende Implementierung von Begründungen im Mathematikunterricht ist.

Tab. 1: Didaktische Ziele und Lehraufträge

angestrebtes Beweisbedürfnis	Lehrauftrag	Im Mathematikunterricht sollen …
kognitiv-situativ	„Damit Schüler […] mathematisch akzeptable Beweise selbst formulieren können, müssen sie über entsprechende Kriterien zur Akzeptanz von Beweisen verfügen." (Ufer et al. 2009, S. 33)	Akzeptanzkriterien mathematischer Begründungen thematisiert werden,
kognitiv-individuell	„Sinnstiftung entsteht durch Transparenz der Funktionen des Beweisens." (Meyer & Prediger 2009, S. 10)	verschiedene Funktionen mathematischer Beweise transparent gemacht werden,
subjektiv-situativ	„Die Hauptaufgabe des Mathematiklehrers im Hinblick auf Weckung eines Beweisbedürfnisses bestünde dann also darin, die generelle Neugier (als Verlangen nach Erkennen des Unbekannten, als exploratory drive) in ein Interesse an theoretischen Fragen zu entwickeln und zu lenken." (Winter 1983, S. 80)	Situationen entstehen, in denen Neugier aufkeimen kann und
subjektiv-individuell	„Ein Beweisbedürfnis kann nur derjenige entwickeln, der prinzipiell auch weiß, wie er es befriedigen kann." (Jahnke 1978, S. 211)	beweisspezifische Erfolgsmomente ermöglicht werden.

Die nächsten Abschnitte widmen sich diesen vier Herausforderungen. Nach einer jeweils kurzen theoretischen Analyse folgen konkrete Unterrichtsvorschläge zur Bewältigung der jeweiligen Aufgabe.

3 Thematisierung von Akzeptanzkriterien mathematischer Begründungen

Damit Schüler*innen akzeptieren können, dass ein mathematischer Satz auf mathematische Weise bewiesen werden muss, ist es notwendig, ihnen zu vermitteln, was einen mathematischen Beweis ausmacht. Die Frage, wann ein Beweis wirklich ein Beweis ist, ist allerdings nicht trivial. Richard Cabassut und seine Kolleg*innen (2012, S. 170) zeigen diese didaktische Schwierigkeit mit Verweis auf Balacheff (2009, S. 118) auf:

> „This situation is difficult to handle in the teaching of mathematics at schools, since there exists no easy explanation of what proof and proving are that teachers could provide to their pupils. Proof is not a ‚stand-alone concept', as Balacheff nicely puts it."

Manin (1977 S. 48) beschreibt die Akzeptanz eines Beweises als sozialen Prozess der mathematischen Community: „A proof becomes a proof after the social act of accepting it as a proof." Die Frage, was ein mathematischer Beweis ist, unterliegt also einem ständigen Aushandlungsprozess von Expert*innen. Allerdings besteht in der wissenschaftlichen Gemeinschaft ein großer Konsens darüber, welchen Regeln ein mathematischer Beweis folgeleisten muss (Ufer et al. 2009). Damit schulische Akzeptanzkriterien für mathematische Begründungen eine persönliche Bedeutung für Schüler*innen haben können, erscheint es sinnvoll, die Klasse als lokale mathematische Community in solche Aushandlungsprozesse einzubeziehen. Gleichzeitig ist es die Aufgabe der jeweiligen Lehrperson sicherzustellen, dass sich die ausgehandelten Akzeptanzkriterien der Schüler*innen nach Möglichkeit an jenen der mathematischen Community orientieren (Yackel & Cobb 1996). Heinze und Reiss (2003) konnten drei Aspekte beweisspezifischen Methodenwissens ausmachen. Ein angemessenes *Beweisschema* bezeichnet ein Wissen darüber, welche Argumente in einer mathematischen Begründung zulässig sind. Im Besonderen sollen autoritäre Argumente (z. B. „Sarah ist die Beste in Mathematik und hat auch gesagt, dass das immer gilt.") als inadäquat zurückgewiesen werden. Empirische Argumente (z. B. „Ich habe das an drei Beispielen ausprobiert und es sieht immer wie ein Quadrat aus.") können ein fruchtbarer Ausgangspunkt für Beweisprozesse sein. Wenn Begründungen aber nicht über diese empirischen Argumente hinausgehen, zeugt dies von einem noch unausgereiften *Beweisschema*. Ein Bewusstsein über die *Beweisstruktur* verhindert, dass ein Zusammenhang, der zu zeigen ist, als Voraussetzung verwendet wird. Es gilt also, Zirkelschlüsse als unzulässige Argumentation zu erkennen. Eine korrekte *Beweiskette* besteht aus aufeinander aufbauenden Argumenten. Schüler*innen sollen feststellen können, ob eine Beweisführung Lücken aufweist.

In den folgenden Abschnitten werden Aktivitäten für Schüler*innen vorgestellt, die das Potential haben, Aushandlungsprozesse im Klassenraum zu initiieren. Bei jeder dieser Aktivitäten liegt der Fokus auf einem der drei Aspekte des beweisspezifischen Methodenwissens.

3.1 Beweisschema – Wer hat das beste Argument?

Harel und Sowder (1998) untersuchten die Art der Argumente, die Mathematikstudent*innen zulassen, um eine Aussage zu belegen oder zurückzuweisen. Sie fanden drei Hauptkategorien von Beweisschemata. Lernende zeigen ein *Beweisschema der externen Überzeugung,* wenn sie sich von einer Autorität überzeugen lassen, ohne die Begründung selbst nachvollzogen zu haben oder die Formalität der Präsentation eines Beweises statt seines Inhaltes als Gültigkeitskriterium heranziehen. Lernende mit einem *empirischen Beweisschema* lassen Induktion oder visuelle Eindrücke als Begründungsgrundlage zu. Das *analytische Beweisschema* bezieht sich auf Argumente, die in der mathematischen Praxis als zulässig anerkannt werden.

Um bei Schüler*innen einen Aushandlungsprozess bezüglich der Zulässigkeit unterschiedlicher Begründungsgrundlagen anzustoßen, scheint es sinnvoll, einen Vergleich verschiedener Begründungen für eine Aussage anzuregen (Abb. 2).

Wer hat das beste Argument?

Die Disneyprinzessinnen treffen einander zu einer Pyjamaparty. Kurz vor dem Einschlafen entsteht eine Diskussion über gerade und ungerade Zahlen. Pocahontas wirft folgende Aussage in den Raum:

Wenn man zwei ungerade Zahlen zusammenzählt, kommt immer eine gerade Zahl heraus.

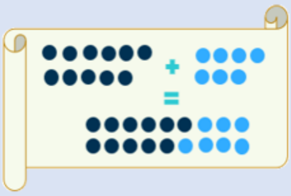
Daraufhin entsteht ein großes Durcheinander. Rapunzel, Merida, Belle und Elsa wollen die Aussage begründen.

Jede ungerade Zahl hat als Einerstelle 1, 3, 5, 7 oder 9. Wenn man zwei von diesen zusammenzählt, erhält man eine Zahl mit einer geraden Einerstelle. Pocahontas hat also Recht!

Klar stimmt das.
5 + 9 = 14
13 + 7 =20
21 + 15 = 36
Pocahontas hat Recht!

Pocahontas hat Recht! Mein Vater hat mir das auch einmal erzählt.

Die Summe aus zwei ungeraden Zahlen kann man immer so aufzeichnen.



Was denkst du? Wer hat das beste Argument?

Abb. 2: Wer hat das beste Argument?

Auch wenn es wünschenswert erscheint, dass das autoritäre und das induktive Argument abgelehnt werden, liegt der Wert dieser Aufgabe in dem Potential, bereits bei jungen Schüler*innen eine offene Diskussion über die Güte verschiedener Argumente anzuregen.

3.2 Beweisstruktur – Was ist da schiefgelaufen?

Für einen Beweis bedarf es einer klaren Trennung zwischen Voraussetzungen und Behauptung. Ein Zirkelschluss ist der klassische Bruch mit dieser Regel. Eine Aussage, die es zu beweisen gilt, wird als Begründungsgrundlage herangezogen. Senk (1985) stellte eine Tendenz von High School Schüler*innen fest, die zu beweisende Aussage im Beweis zu verwenden und schloss daraus, dass Mathematikunterricht mehr Möglichkeiten zur Sinnstiftung im Zusammenhang mit Beweisen und Begründungen eröffnen sollte.

Um diesen häufigen Fehler in Argumentationsprozessen im Unterricht thematisieren zu können, bietet sich eine Fehlersuche an (Abb. 3).

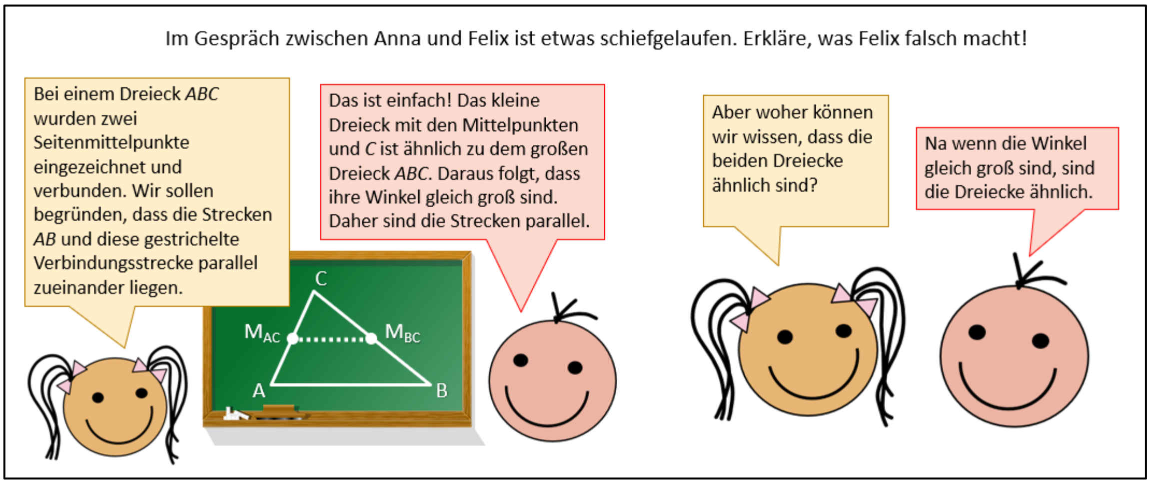


Abb. 3: Was ist da schiefgelaufen?

Das Ziel dieser Aufgabe ist das Erkennen des Zirkelschlusses. Felix schließt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke auf die Gleichheit der Winkel und anschließend umgekehrt aus der Gleichheit der Winkel auf die Ähnlichkeit der Dreiecke. Da das Erkennen dieses Fehlers im mathematischen Kontext eine große Herausforderung sein kann, ist ein Vergleich mit einer außermathematischen Argumentation hilfreich (Abb. 4). Im Anschluss kann der Zirkelschluss als ein besonderer Argumentationsfehler allgemein thematisiert werden.

Abb. 4: Felix hat es schon wieder gemacht!

3.3 Beweiskette – Ordnung schaffen

Ein gültiger Beweis besteht aus einer Argumentationskette, in der jedes Argument deduktiv aus dem vorherigen geschlossen werden kann. Um solche Beweisketten zu veranschaulichen, kann auf ein Modell der Argumentationsanalyse nach Stephen Toulmin zurückgegriffen werden. Philosophische Argumentationen lassen sich mit Hilfe des *Toulmin-Schemas* aufgliedern.

Jeder Schluss besteht aus einem Datum und einer Conclusio sowie einer Schlussregel bzw. Stützung, die darlegt, wie das Datum und die Conclusio miteinander verbunden sind (Abb. 5). Folgende außermathematische Argumentation (vgl. Bruder et al. 2007) lässt sich als eine Aneinanderreihung einzelner Schlussfolgerungen betrachten. Dadurch wird die Argumentationskette ersichtlich. (Abb. 6)

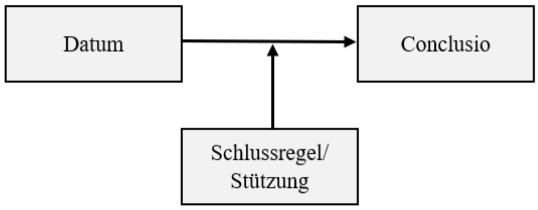


Abb. 5: Toulmin-Schema

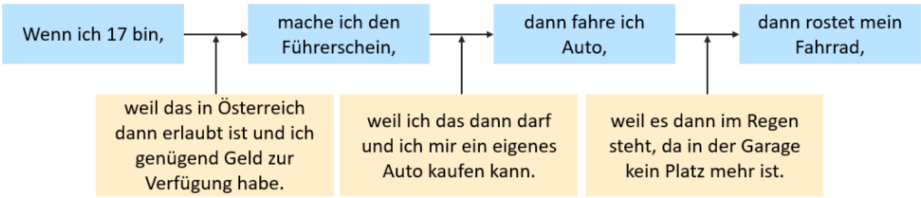


Abb. 6: Analyse einer außermathematischen Argumentation

Götz Krummheuer (2003) betont das Potential des *Toulmin-Schemas* als Analyseinstrument für die mathematikdidaktische Forschung. Es liegt nahe, dass dieses Instrument ebenfalls für den Mathematikunterricht nutzbar gemacht werden kann. In folgender Aufgabe (Abb. 7) wird das Schema verwendet, um Schüler*innen eine Möglichkeit zu bieten, einen eigenen Beitrag bei der Erarbeitung eines Beweises zu leisten und gleichzeitig den Aufbau eines Beweises als lückenlose Kette von Argumenten zu reflektieren.

Obwohl hier eine eindeutige Lösung (Abb. 8) existiert, liegt der Mehrwert dieser Aufgabe in der Eröffnung von Räumen für die Thematisierung einer Metaebene des Beweisens in der Mathematik.

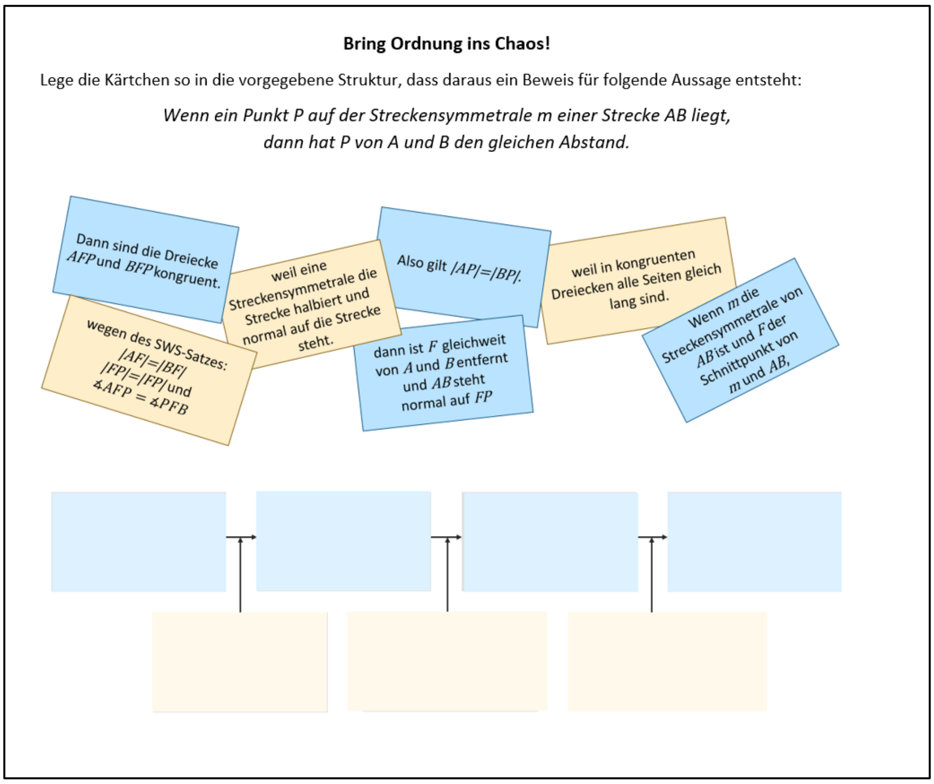


Abb. 7: Bring Ordnung ins Chaos!

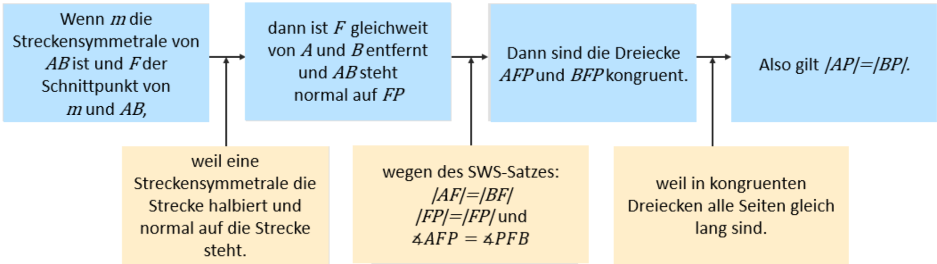


Abb. 8: Lösung zur Aufgabe „Bring Ordnung ins Chaos!“

4 Funktionen von Beweisen

Wie in Abschnitt 1 erläutert wurde, klärt sich die Frage, wozu Mathematiker*innen beweisen bzw. wieso diese Beweise im Mathematikunterricht eine Rolle spielen, für Schüler*innen nicht ohne diesbezügliche didaktische Bemühungen. Viele Autor*innen befassen sich mit den Funktionen des mathematischen Beweises. Die folgende Aufzählung orientiert sich stark an de Villers (1990).

1. Verifikation/Überzeugung
2. Begründung/Erklärung
3. Systematisierung/Entdeckung
4. Kommunikation
5. intellektuelle Herausforderung

In den folgenden Abschnitten werden konkrete Unterrichtsinhalte beleuchtet, anhand derer die ersten vier dieser Funktionen für Schüler*innen sichtbar gemacht werden können. Die Funktion des Beweises als intellektuelle Herausforderung ist so sehr mit beweisspezifischen Erfolgserlebnissen verbunden, dass diesbezüglich auf den Abschnitt 6 verwiesen wird.

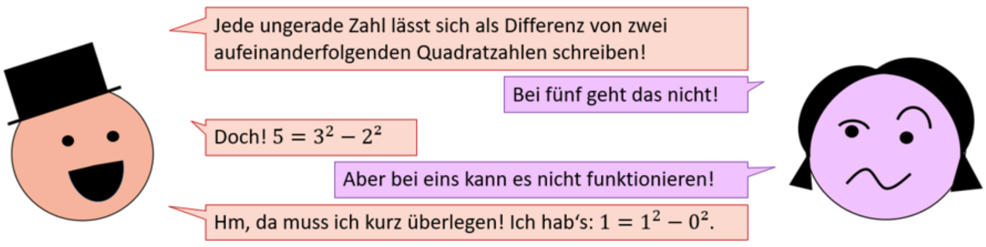
4.1 Verifikation und Überzeugung

Ein mathematischer Beweis dient dazu, den Wahrheitsgehalt einer Aussage zu belegen. Unter bestimmten Voraussetzungen erzeugt er zusätzlich eine subjektive Überzeugung bezüglich der Allgemeingültigkeit der in Frage stehenden Aussage.

Zur Förderung des Beweisbedürfnisses schlägt Heinrich Winter (1989) die Etablierung sogenannter *Beweissprechakte* im Mathematikunterricht vor. Unter *Sprechakt* versteht er eine sprachliche Handlung, durch die sich die Realität ändert (z. B. Eheversprechen). Durch einen Beweissprechakt wird in der Klasse eine bestimmte Wirkung erzeugt. Die in Frage stehende Aussage wird danach als wahr akzeptiert und kann von diesem Zeitpunkt an für Anwendungen oder als Argumentationsgrundlage für andere Aussagen verwendet werden. Winter orientiert sich dabei an Vollrath (1969), der sich für eine dialogische Einbindung von Schüler*innen in Beweisprozesse ausspricht. Im Zentrum seiner Idee steht ein Dialog zwischen zwei Schüler*innen mit zugewiesenen Rollen, eine*r Proponent*in und eine*r Opponent*in. Der*die Proponent*in versucht, die Wahrheit einer Aussage durch Auffinden einer allgemeingültigen Regel zu belegen. Der*die Opponent*in bezweifelt die Aussage durch Anführen von Gegenbeispielen oder anderen Zweifeln. Die Allgemeingültigkeit einer Aussage wird dadurch in Zweifel gezogen und die Verifikations- bzw. Überzeugungsfunktion mathematischer Beweise deutlich. Laut Wille (2009) sind *selbst erdachte Dialoge* ein geeignetes Werkzeug, um Denkmuster von Schüler*innen sichtbar zu machen. Sie schlägt vor, den Anfang eines Dialoges als Input vorzugeben, den Lernende fortführen sollen. Die Überlegungen von Winter (1989), Vollrath (1969) und Wille (2009) lassen sich kombinieren. Um einen Beweissprechakt anzustoßen, wird der Anfang eines solchen Dialoges präsentiert. Bei der hier vorgestellten Aktivität für den Mathematikunterricht wurde ein Inhalt gewählt, dessen Wahrheitsgehalt für Schüler*innen wirklich in Zweifel stehen kann (Abb. 9).

Wie kann der Dialog weitergehen?

Herr OBERSCHLAU und Frau SKEPTISCH diskutieren.



Führe den Dialog zwischen Herrn OBERSCHLAU und Frau SKEPTISCH weiter!

Herr OBERSCHLAU behält Recht, wenn er eine Regel für seine Aussage finden und begründen kann. Frau SKEPTISCH behält Recht, wenn sie eine Ausnahme oder einen anderen Grund für die Unmöglichkeit der Aussage findet.

Abb. 9: Wie kann der Dialog weitergehen?

Sicher geht 15 nicht!

Doch: $8^2 - 7^2$

Was ist mit 21?

$11^2 - 10^2$

Und 33? Geht das?

$17^2 - 16^2$

Was ist mit der Zahl 49?

$25^2 - 24^2$

Kannst du es auch mit 121?

$61^2 - 60^2$

313?

$161^2 - 160^2$

6 666 667?

$3\,333\,334^2 - 3\,333\,333^2$

469 135 781?

$234\,567\,891^2 - 234\,567\,890^2$

Die Basis der Zahlen müssen sich auf das Ergebnis ergänzen!

Du hast Recht, Herr Oberschlau.

Natürlich habe ich Recht … ich habe immer Recht.

Abb. 10a: Dialog zweier Schüler*innen

$x^2-y^2 = x+y$

$x+y = n$

$x = y+1$

$y+1+y = n$ $\qquad$ $n = 2y+1$

$n = (y+1)^2-y^2$

Abb. 10b: Beweis zweier Schüler*innen

In einem Förderprogramm für mathematikbegeisterte Unterstufenschüler*innen (7. Schulstufe) wurde in Partnerarbeit der Dialog wie in Abb. 10a weitergeführt. Es lässt sich beobachten, dass die beiden Schüler*innen anhand großer, scheinbar willkürlich ausgewählter Zahlen zeigen, dass sie eine Regel gefunden haben, mit der sie die beiden gesuchten Quadratzahlen generieren können. Der spielerische Umgang mit der Wahl der Zahlen weist darauf hin, dass sie von der Allgemeingültigkeit ihrer Regel überzeugt sind, die sie am Ende des Dialoges ausformulieren. Die Notwendigkeit, den Dialog mit einem Beweis für ihre Regel abzuschließen, sehen die Schüler*innen offenbar nicht. Erst nach der Aufforderung durch die Lehrkraft, eine Begründung dafür zu finden, dass diese Regel immer funktioniert, formulieren sie einen algebraischen Beweis (Abb. 10b). Zwar weist der Beweis noch keine Struktur auf, anhand derer man die Argumentationskette nachvollziehen kann, die Beweisidee lässt sich allerdings durchaus erkennen. Die Schüler*innen zeigen die Äquivalenz $(y+1)^2 - y^2 = 2y + 1 = (y+1) + y$.

Der Fokus auf die Frage, ob diese Aussage wahr ist oder nicht, erzeugte noch kein Bedürfnis bei den Schüler*innen, einen Beweis für die Aussage zu finden. Erst die Betonung der Frage, WARUM diese Regel gilt, bewegte die Lernenden zur Formulierung einer Beweisidee. Dies bestätigt die Forderung, die Funktion der Erklärung und Begründung des mathematischen Beweises im Unterricht sichtbar zu machen (Meyer & Prediger 2009).

4.2 Begründung und Erklärung

Mathematische Beweise werden oft als abstrakt und daher als kompliziert wahrgenommen. Dementgegen steht das didaktische Konzept der inhaltlich-anschaulichen Beweise. Diese basieren auf „Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, dass sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen“ (Wittmann & Müller 1988, S. 249). Dadurch bieten sie nicht nur einen Nachweis für die Allgemeingültigkeit einer Aussage an, sondern liefern auch eine Begründung dafür. Diese Mehrleistung ist für die Sinnstiftung im Unterricht ausgesprochen bedeutsam, da eine persönliche Überzeugung bezüglich des Wahrheitsgehalts einer Aussage in vielen Fällen bereits durch bloße Exploration erzeugt werden kann. Ein didaktisch wertvoller Beweis kann also nicht nur zeigen, dass etwas gilt. Er zeigt vor allem, wieso etwas gilt (vgl. Hanna 1990).

Die Arbeit mit Punktmustern ist eine Möglichkeit, Phänomene im Zusammenhang mit natürlichen Zahlen zu beweisen. Will man zeigen, dass die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch drei teilbar ist, so lässt sich dies algebraisch lösen:

$$(n-1) + n + (n+1) = 3n$$

Ein Beweis anhand eines Punktmusters kann allerdings auf anschauliche Weise die Allgemeingültigkeit dieser Aussage belegen. Damit liefert er auch für junge Schüler*innen mit wenig algebraischen Kenntnissen eine Begründung für dieses Phänomen.

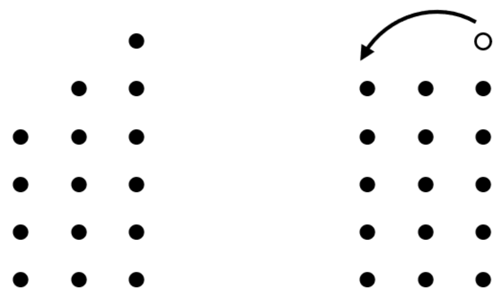


Abb. 11: Beweis mit Punktmuster

Es lässt sich erkennen, dass das Umschichten einer Einheit von der letzten auf die erste Säule immer drei gleich hohe Säulen erzeugt. Außerdem könnte man sich fragen, ob sich dieser Satz verallgemeinern lässt. Ist die Summe aus vier (fünf, sechs, . . .) aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen auch immer durch vier (fünf, sechs, . . .) teilbar? Das Punktmuster lädt zum Erkunden und Entdecken ein.

4.3 Systematisierung und Entdeckung

Beweise sind ein Bindeglied zwischen verschiedenen mathematischen Phänomenen. Einerseits zeigen sie Verbindungen zwischen der in Frage stehenden Vermutung mit bereits bekannten Objekten und Sätzen auf. Andererseits ermöglichen Beweise oft die Entdeckung neuer Inhalte. Sie schlagen also eine Brücke ins Unbekannte. De Villiers (1990) zeigt mit folgendem Beispiel eindrucksvoll, wie diese Funktionen im Unterricht sichtbar gemacht werden können.

Untersucht man die Mittenvierecke von Drachenvierecken, die durch die Verbindung der vier Seitenmittelpunkte entstehen, könnte man die Vermutung aufstellen, dass diese immer Rechtecke sind (Abb. 12).

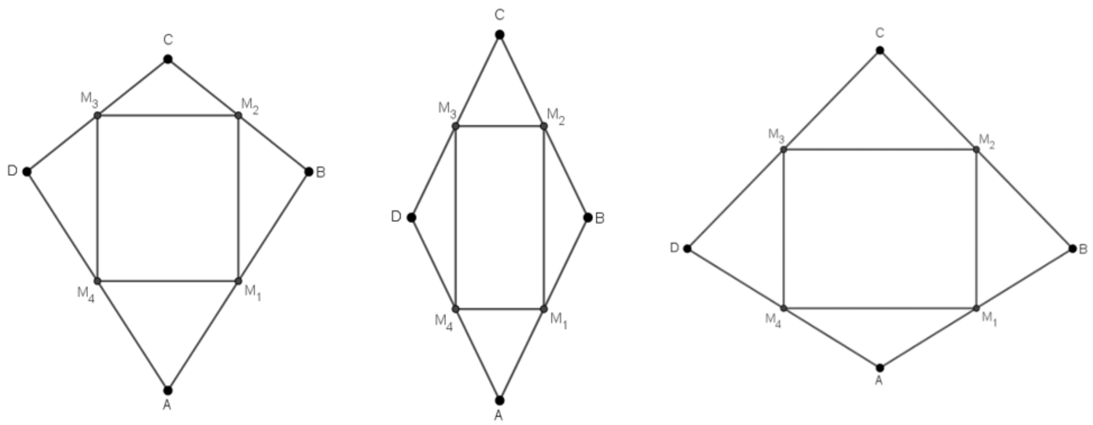


Abb. 12: Mittenvierecke von Deltoiden

Durch Einzeichnen der Diagonalen entstehen vier Paare ähnlicher Dreiecke. Beispielsweise sind die Dreiecke BCD und M_2CM_3 ähnlich, da sie sich einen Winkel in C teilen und $\overline{CM_2}:\overline{CB} = \overline{CM_3}:\overline{CD} = 1:2$. Daher sind die Seiten des Mittenvierecks parallel zu den Diagonalen des ursprünglichen Vierecks. Der Beweis der aufgestellten Vermutung stellt also eine Verbindung zu den Eigenschaften ähnlicher Dreiecke her. Auch eine Argumentation über die Umkehrung des Strahlensatzes wäre möglich.

Die Beweisführung zeigt aber noch mehr. Die Voraussetzung, dass das ursprüngliche Viereck ein Drachenviereck ist, lässt sich weiter fassen. Um ein rechteckiges Mittenviereck zu erhalten, genügt es, wenn die Diagonalen des Vierecks normal aufeinander stehen (Abb. 13).

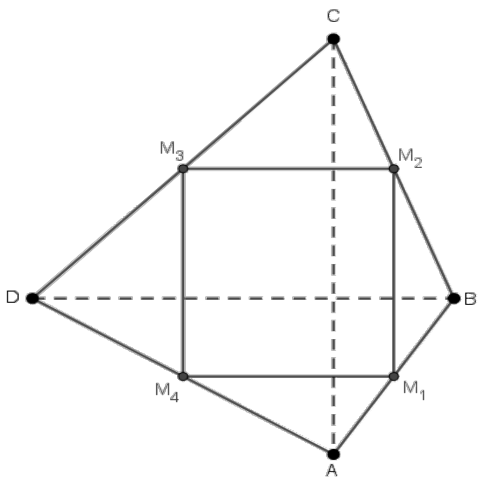


Abb. 13: Rechteckiges Mittenviereck

Betrachtet man den Beweis genau, so erkennt man, dass die Parallelität der Seiten zu den Diagonalen nicht von der

Art des ursprünglichen Vierecks abhängt. Die Dreiecke BCD und M_2CM_3 sind auch ähnlich, wenn die Diagonalen nicht normal aufeinander stehen, da sie nach wie vor einen gemeinsamen Winkel in C haben und $\overline{CM_2}:\overline{CB} = \overline{CM_3}:\overline{CD} = 1:2$ gilt. Die Seiten des Mittenvierecks sind also auch bei allgemeinen Vierecken parallel zu den Diagonalen des ursprünglichen Vierecks. Daraus ergibt sich, dass alle Mittenvierecke konvexer Vierecke Parallelogramme sein müssen, also der *Satz von Varignon*.

4.4 Kommunikation

Ein Beweis dient dazu, sich als wissenschaftliche Community über mathematische Sachverhalte auszutauschen. Einige schulmathematische Inhalte eignen sich dazu, Schüler*innen zu einer mathematischen Diskussion anzuregen. In einem Förderprogramm für mathematikbegeisterte Unterstufenschüler*innen (7. Schulstufe) wurde die Hypothese $0,\dot{9} = 1$ zur Diskussion gestellt. Um die Diskutierenden dazu zu ermutigen, auf die Argumente der Vorredner*innen einzugehen, wurden die vorgebrachten Begründungen tabellarisch gesammelt (Abb. 14). Auf diese Weise entstand ein Überblick über die Diskussion.

Durch das Notieren aller Argumente, waren Schüler*innen gezwungen, ihre Begründungen möglichst nachvollziehbar zu formulieren. Zusätzlich konnte sich die Lehrkraft immer wieder auf bereits vorgebrachte Argumente beziehen und Schüler*innen auffordern, dazu Stellung zu nehmen. Dadurch entstand eine konstruktive und emotionale Diskussion zum Thema. Diese wurde auf Wunsch der Gruppe in der nächsten Einheit weitergeführt. Der Wahrheitsgehalt der Aussage konnte allerdings nicht restlos geklärt werden. Eventuell ist die 7. Schulstufe noch nicht der richtige Zeitpunkt für diese Diskussion.

$0,\dot{9} = 1$?	
DAFÜR	DAGEGEN
Irgendwann muss ich ja zu 1 kommen, weil die Zahl 1 ja schon existiert. Irgendwie muss ich dahin kommen.	
	Aber es muss ja irgendwas dazwischen sein … sowas wie 0,000000000 irgendwas.
	Gibt es 0,0periodisch und hinten eine 1?
Periode heißt ja unendlich oft.	
$1 - 0,\dot{9} = \ldots$ Da rutscht die 1 immer weiter nach hinten, bis in die Unendlichkeit Daher wird sie unendlich klein.	
	Da ist aber noch immer ein kleiner Unterschied.
	Realität ist nicht gleich Mathematik.
	Auch wenn man den Unterschied nicht messen kann, ist er noch da.
	In der Realität könnte man den Unterschied vernachlässigen aber nicht in der Mathematik.
Ist nicht $0,\dot{9} = \frac{9}{9} = \frac{1}{1} = 1$?	
	Aber $9,\dot{9}$ ist doch nicht gleich 10!

Abb. 14: Rechteckiges Mittenviereck

Die in den letzten Abschnitten diskutierten Funktionen von Beweisen stehen nie für sich allein. Im Dialog zwischen Frau SKEPTISCH und Herrn OBERSCHLAU (Abb. 9) geht es beispielsweise nicht ausschließlich darum, ob die Vermutung von Herrn OBERSCHLAU korrekt ist. Es stellt sich auch die Frage, durch welche Regel sich diese Gesetzmäßigkeit begründen lässt und wieso diese Regel allgemeingültig ist. Die dialogische Herangehensweise betont zusätzlich die Kommunikationsfunktion von Beweisen. In der Diskussion rund um die Äquivalenz von $0,\dot{9}$ und 1 (Abb. 14) wurde hartnäckig für bzw. gegen die vorgelegte Hypothese argumentiert. Ihr Wahrheitsgehalt wurde zu einem relevanten Anliegen auf subjektiver Ebene. Die Verifikation bzw. Widerlegung der in Frage stehenden Aussagen stand im Mittelpunkt der Diskussion.

Die verschiedenen Funktionen mathematischer Beweise greifen also ineinander und bereichern sich gegenseitig. Wollen Lehrkräfte die Funktionen von Beweisen im Unterricht sichtbar machen, stehen sie also weniger vor der Frage, welche Funktion des Beweisens durch einen bestimmten Inhalt sichtbar gemacht werden kann. Vielmehr müssen sie sich bewusst entscheiden, welche Funktion sie ins Zentrum ihrer konkreten Unterrichtsplanung stellen möchten und wie sie eine gewisse Ausgewogenheit zwischen den verschiedenen Funktionen in ihrer langfristigen Planung herstellen können.

5 Neugier wecken – Erzeugung eines Kognitiven Konflikts

Damit Schüler*innen sich persönlich dafür interessieren, ob eine Aussage allgemeingültig ist, warum sie gültig sein muss und wie sie mit anderen mathematischen Aussagen zusammenhängt, müsste das in Frage stehende mathematische Phänomen ihre Neugier wecken. Aus der Neugierforschung ist bekannt, dass ein kognitiver Konflikt ein Auslöser für Neugier sein kann. Einige Mathematikdidaktiker*innen haben Vorschläge gebracht, wie die Auseinandersetzung mit einem mathematischen Phänomen zu einem kognitiven Konflikt führen kann.

5.1 Unlösbare Probleme

Martin Stein (1999) hebt das Potential unlösbarer Probleme für den Mathematikunterricht hervor. Die Aufgabe, eine Lösung zu einem gegebenen Problem zu finden, und die Erkenntnis über die Unmöglichkeit, diese Aufgabe erfolgreich zu meistern, stehen im Widerspruch zueinander und lösen einen kognitiven Konflikt aus. Dadurch kann das Bedürfnis entstehen, diese Unmöglichkeit zu begründen. Dies ist laut Stein allerdings nie eine triviale Angelegenheit, da eine systematische Betrachtung des gesamten Suchraums nötig ist. Die Unlösbarkeit lässt sich nicht durch die Untersuchung einzelner Beispiele verdeutlichen. Für den Mathematikunterricht sind unlösbare Probleme selbstverständlich nur dann interessant und sinnvoll, wenn sich ihre Unlösbarkeit für Schüler*innen nachvollziehbar begründen lässt. Um die Gefahr der Frustration bei Lernenden zu minimieren, lassen sich lösbare und unlösbare Aufgaben kombinieren (Abb. 15).

Auf der Suche nach Funktionen

Manche dieser Aufgaben sind lösbar, manche nicht.

Gib einen Funktionsterm einer Polynomfunktion dritten Grades an, die

a) keinen Wendepunkt hat.
b) einen Wendepunkt hat, der kein Sattelpunkt ist.
c) einen Sattelpunkt hat, der kein Wendepunkt ist.
d) im Punkt (2|3) einen Hochpunkt hat.

Abb. 15: Lösbare und Unlösbare Probleme

5.2 Ist das Zufall?

Buchbinder und Zaslavsky (2011) schlagen einen Aufgabentyp mit dem Namen „Ist das Zufall?“ oder im Original „Is this a coincidence?“ vor. Dabei wird Lernenden ein mathematisches Phänomen nähergebracht, indem man sie mit einem Beispiel konfrontiert und fragt, ob das Beobachtete ein Zufall ist. Die sonst so problematische Beziehung zwischen Beispiel und Allgemeingültigkeit wird also bereits in der Fragestellung berücksichtigt. In ihrer Studie stellten die beiden Autoren fest, dass dieser Aufgabentyp entweder zu Verunsicherung oder zu

Zufall?
Lisa betrachtet ihre Hausübung.
Sie musste die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ lösen.
Ihr Ergebnis lautet
$x_1 = 2$
$x_2 = 3$.
Sie überlegt: *„Wenn ich die beiden Ergebnisse multipliziere, erhalte ich 6, also einen Koeffizienten der Gleichung. Wenn ich die beiden Ergebnisse addiere, erhalte ich 5, also den anderen Koeffizienten der Gleichung. Ist das Zufall?“*
Was denkst du? War das Zufall?

Abb. 16: Zufall?

extremer Überzeugtheit bei Lernenden geführt hat. Daher schreiben sie ihm das Potential zu, Beweisbedürfnis zu wecken. Einen lehrplannahen Vorschlag für den Einsatz dieses Aufgabentyps in der Sekundarstufe II ist in Abb. 16 angeführt.

6 Beweisspezifische Erfolgsmomente ermöglichen

Um Beweiskompetenz schrittweise aufzubauen, ist es notwendig, Aufgaben auf verschiedenen Anforderungsniveaus bereitzustellen. Nicht alle Beweise erfordern einen kreativen Geistesblitz oder enorme Abstraktionsfähigkeit. Es gibt Begründungen, die mit einem einzigen Schritt auskommen. Um Beweise zu erarbeiten, die in mehreren Schritten geführt werden müssen, kann geeignetes Scaffolding zu individuellen Erfolgsmomenten führen. Für das erfolgreiche Formulieren mehrschrittiger Beweise werden allerdings Problemlösekompetenzen benötigt, die ebenfalls schrittweise aufgebaut werden müssen. In den folgenden Abschnitten werden Vorschläge für Schüler*innenaktivitäten auf drei Schwierigkeitsstufen vorgebracht.

1. Formulierung einschrittiger Begründungen
2. Arbeit an mehrschrittigen Beweisen
3. Selbstständige Erarbeitung mehrschrittiger Beweise

6.1 Formulierung einschrittiger Begründungen

Das Arbeiten mit Beispielen wird im Zusammenhang mit Beweisen oft unterbunden. Allerdings ist diese Einschränkung nicht allgemeingültig. So können Existenzaussagen durch Beispiele bewiesen werden. Ebenso dienen Gegenbeispiele zur Widerlegung von Allaussagen. Das könnte für Schüler*innen zunächst als Diskrepanz aufgefasst werden. Bruder et al. (2017) schlagen mit einer ähnlichen Aufgabe wie jener in Abb. 17 vor, die Zulässigkeit von Beispielen als Argumentationsbasis explizit zu machen.

Begründungstyp gesucht

Entscheide, mit welchem Begründungstyp (Beispiel, Gegenbeispiel oder Rückgriff auf Definition/Satz) man eine sinnvolle Begründung für die Behauptungen finden kann. Gib eine eigene Begründung für oder gegen die Behauptung sowie den Begründungstyp an.

a. Jede natürliche Zahl ist durch 2 teilbar.
b. Jedes Parallelogramm ist ein Trapez.
c. Es gibt Dreiecke mit genau einer Symmetrieachse.

Abb. 17: Begründungstyp gesucht

6.2 Arbeit an mehrschrittigen Beweisen

Für Schüler*innen ist oft nicht klar, was zu tun ist, wenn eine mathematische Begründung oder ein Beweis von ihnen verlangt wird. Das liegt an einem prinzipiellen Paradox der Didaktik des Beweisens. Hemmi (2008, S. 417) drückt dies folgendermaßen aus: „It is not easy to talk about proof without some experience of it. But it can be difficult for students to understand the meaning of proof or learn to produce their own proofs without an explicit focus on them." Daraus lässt sich schließen, dass sich die Beschäftigung mit konkreten Beweisen und die Klärung der Frage, was ein mathematischer Beweis ist, nicht voneinander trennen lassen. Aus einer sprachlichen Perspektive ist dies eine Schwierigkeit auf Diskursebene, die neben der Wort- und Satzebene große sprachliche Hürden für Lernende bereithält.

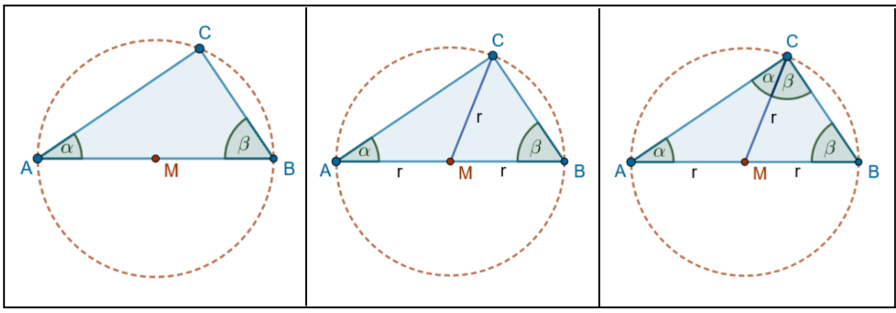
Die Verben *beweisen, begründen* und *argumentieren* haben im mathematischen Kontext mitunter andere Bedeutungen als im Alltag. Es ist also unter Umständen notwendig, Schüler*innen bei einer Formulierung eines Beweises lokale Hilfestellungen anzubieten, die ihnen ein Gerüst des erwarteten Textes bereitstellen. Hier sollen zwei Möglichkeiten aus dem Repertoire sprachsensiblen Unterrichts diskutiert werden.

Beweise bekommen Worte

Mithilfe einer Filmleiste oder einer Bildersequenz können fachliche Vorgänge durch Bilder dargestellt werden. Auf diese Weise bilden sie eine geeignete Grundlage zur selbstständigen Textproduktion. Viele mathematische Beweise kommen im Grunde ohne Worte aus, wie das Werk „Beweise ohne Worte“ von Nelsen (2016) auf ästhetische Weise zeigt. Die Betrachter*innen müssen allerdings selbstständig den Kern des Beweises erkennen. Abb. 18 zeigt eine Möglichkeit für die Umsetzung dieser Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Schüler*innen müssen dabei den dargestellten Beweis erklären, die Entwicklung einer Beweisidee und das Ordnen der Argumente wird Ihnen dabei allerdings abgenommen. Auf diese Weise können Schüler*innen erste aktive Begegnungen mit mehrschrittigen Beweisen machen.

Ein Beweis sucht Worte!

Mit folgenden Bildern wird der Satz von Thales bewiesen. Allerdings sind dem Beweis die Worte abhandengekommen. Schreibe eine Erklärung der einzelnen Beweisschritte!



$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$$
$$2 \cdot (\alpha + \beta) = 180°$$
$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\gamma = 90°$$

Abb. 18: Ein Beweis sucht Worte!

Diese Aufgabe lässt sich auf einfache Weise in ihrer Schwierigkeit variieren. So könnten Schüler*innen unterstützt werden, indem zusätzlich vorgegebene Sprachmittel in Form von Satzbausteinen als Formulierungshilfen bereitgestellt werden. Andererseits können die algebraischen Umformungen (viertes Bild in Abb. 18) weggelassen werden, um fortgeschritteneren Schüler*innen eine angemessene Herausforderung zu bieten. Eine modernere Variante dieser Aktivität wäre das Einsprechen der Tonspur zu einem stummgeschaltenen Erklärvideo. Auf entsprechenden Plattformen lassen sich viele mathematische Beweise finden, die sich dazu eignen.

Beweislücken füllen

Ein Lückentext ist ein fachlicher Text, aus dem gezielt Inhalte entfernt wurden, um diese von Lernenden ergänzen zu lassen. Hier soll vorgeschlagen werden, dass dieser fachliche Text ein mathematischer Beweis sein kann. Auch dabei wird die Struktur des Beweises bereits vorgegeben. Die Aktivität der Schüler*innen beschränkt sich auf das Auffinden der fehlenden Argumente. Abb. 19 zeigt einen Beweis mit Lücken, dass die Diagonalen eines Deltoids normal aufeinander stehen. Dafür sei vorausgesetzt, dass ein Deltoid als Viereck definiert ist, das zwei Paar gleich lange benachbarte Seiten hat. Die Lücken wurden so gewählt, dass die fehlenden Argumente den dargebotenen ähneln. Dadurch können sich Schüler*innen an diesen orientieren. Damit der Fokus auf die auszufüllenden Lücken nicht das

Gesamtbild des Beweises vernebelt, zahlt es sich aus, sich im Anschluss an die Aktivität noch einen Überblick über den gesamten Text zu verschaffen.

Eine andere Variante dieses Aufgabentyps stützt sich auf eine tabellarische Darstellung von Beweisen. Diese Form bietet eine besonders gute Übersicht über den Aufbau mathematischer Begründungen. Eine solche Aktivität ist in Abb. 20 zum Kosinussatz dargestellt.

Aussage:

„Die Diagonalen jedes Drachenvierecks stehen normal aufeinander."

Beweis

Wir wissen, dass a gleich lang ist wie d und b gleich lang ist wie c, weil ein Drachenviereck ein Viereck mit zwei Paar gleich langen Nachbarseiten ist.

Daraus folgt, dass das Dreieck ABC und das Dreieck ADC kongruent sind, weil sie drei gleich lange Seiten haben (SSS-Satz).
Also ist auch der Winkel $\sphericalangle CAB$ gleich groß wie der Winkel $\sphericalangle CAD$, weil kongruente Dreiecke gleich große Winkel haben.
Also wissen wir jetzt auch, dass das Dreieck ABE und das Dreieck ADE kongruent sind, weil

____

____

____

____

Nun können wir guten Gewissens behaupten, dass die Winkel $\sphericalangle AEB$ und $\sphericalangle AED$ gleich groß sind, weil

____

Wir wissen auch, dass $\sphericalangle AEB + \sphericalangle AED = 180°$, weil BD eine Diagonale, also eine Strecke ist.
Daraus folgt bereits, dass die Diagonalen e und f aufeinander normal stehen, weil

____

____

____.

Damit ist die Aussage bewiesen. 😊

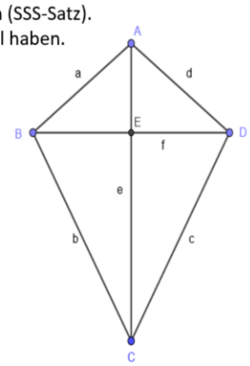


Abb. 19: Lückentext

Wir wollen den **Kosinussatz** herleiten. Er lautet:

In jedem Dreieck mit den Seiten a, b und c gilt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$.

Wir führen den Beweis für spitzwinklige Dreiecke. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Die Höhe auf die Seite c bezeichnen wir mit h_c. Der Fußpunkt dieser Höhe soll F heißen. Die zwei Abschnitte der Seite c, die durch den Punkt F getrennt werden, heißen p und q.

Ergänze die Tabelle mit Begründungen zu den einzelnen Beweisschritten!

Schritt	Wir wissen, dass…	weil, …
1	$a^2 = h_c^2 + q^2$	
2	$h_c^2 = b^2 - p^2$	
3	$q = c - p$	
4	$a^2 = b^2 - p^2 + (c-p)^2$	
5	$a^2 = b^2 - p^2 + c^2 - 2cp + p^2$	
6	$a^2 = b^2 + c^2 - 2cp$	
7	$p = b \cdot \cos(\alpha)$	
8	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$	

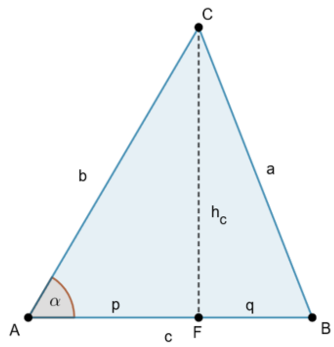


Abb. 20: Beweislücken in Tabellenform

6.3 Selbstständige Erarbeitung mehrschrittiger Beweise

Mathematische Beweise zu finden, kann als Problemlöseprozess aufgefasst werden, in dem Sinn als eine Hürde überwunden werden muss, „ohne dass ein passendes Lösungsverfahren auf der Hand liegt" (Büchter & Leuders 2005). Für die Entwicklung von Problemlösekompetenz ist eine

Auseinandersetzung mit Heuristiken, also Problemlösestrategien zentral. Bruder (2011) schlägt ein Phasenmodell zur Erarbeitung von Heuristiken vor.

1. Gewöhnen an heuristische Methoden oder Techniken durch Reflexion im Anschluss an eine Aufgabenlösung durch die Frage: *Was hat uns geholfen, die Aufgabe zu lösen?*
2. Bewusstmachen einer speziellen Methode oder Technik anhand eines markanten Beispiels
3. Bewusste Übungsphasen mit Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit zur selbstständigen Bearbeitung
4. Beispiele aus anderen mathematischen Gebieten suchen, bei denen die neue Strategie auch Anwendung finden kann

Beweisspezifische Heuristiken könnten beispielsweise sein:

- Zusätzliches Einzeichnen von Informationen in gegebenen Figuren
- Arbeiten mit Punktmustern
- Darstellung natürlicher Zahlen durch Zehnerpotenzen
- etc.

Die vier Phasen werden in den nächsten Abschnitten für die Heuristik „zusätzliches Einzeichnen von Informationen in gegebenen Figuren“ umrissen.

Gewöhnen durch Reflexion

An folgender Aufgabe von Heinrich Hemme (2020) in Abb. 21 können Schüler*innen in der ersten Phase erkennen, wie wertvoll das Einzeichnen zusätzlicher Informationen sein kann.

Unbestimmt! Oder doch nicht?

Ein Rechteck wurde wie in der Abbildung in vier Dreiecke zerlegt. Die Zahlen in den Dreiecken geben die jeweiligen Flächeninhalte an. Kann man den vierten Flächeninhalt bestimmen?

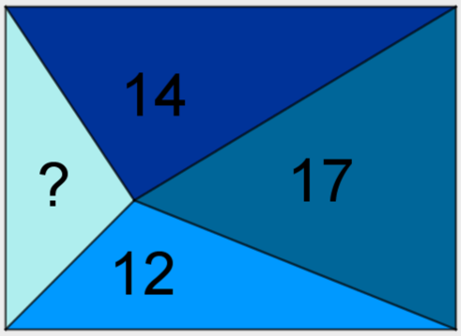


Abb. 21: Unbestimmt! Oder doch nicht? (vgl. Hemme 2020)

Durch das Einzeichnen zweier Parallelen zu den Rechteckseiten durch den gemeinsamen Eckpunkt P entstehen kongruente Dreiecke (Abb. 22). Die Strecke PC ist die Diagonale des Rechtecks $PFCG$, daher sind die Dreiecke PFC und CGP kongruent. Dasselbe gilt für die Dreiecke HPD und GDP. Daraus folgt, dass das Rechteck $HFCD$ den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks PCD, also 28 hat. Aufgrund derselben Überlegung hat das Rechteck $ABFH$ einen Flächeninhalt von 24. Das ursprüngliche Rechteck

$ABCD$ hat also einen Flächeninhalt von 52. Durch Subtraktion der bekannten Flächeninhalte erhält man für den gefragten Flächeninhalt 9.

Die Rückschau auf die Lösung führt zur Einsischt, dass das geschickte Ergänzen geometrischer Elemente der Schlüssel für einen Lösungsprozess sein kann. Das Auffinden kongruenter – und damit flächengleicher – Dreiecke wurde erst dadurch ermöglicht.

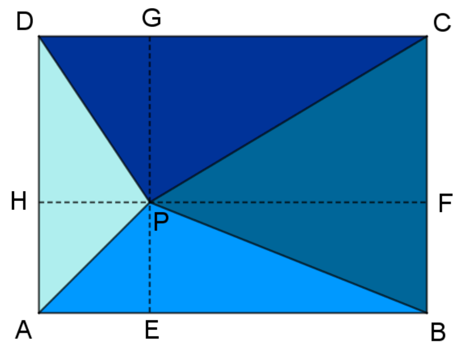


Abb. 22: Lösung durch Einzeichnen von Parallelen

Bewusstmachen einer Heuristik

Als markantes Beispiel für das Einzeichnen zusätzlicher Informationen in geometrischen Figuren könnte die Aufgabe in Abb. 23 dienen, die dem Bewerb *Känguru der Mathematik* für die 7. und 8. Schulstufe (2015) entnommen wurde.

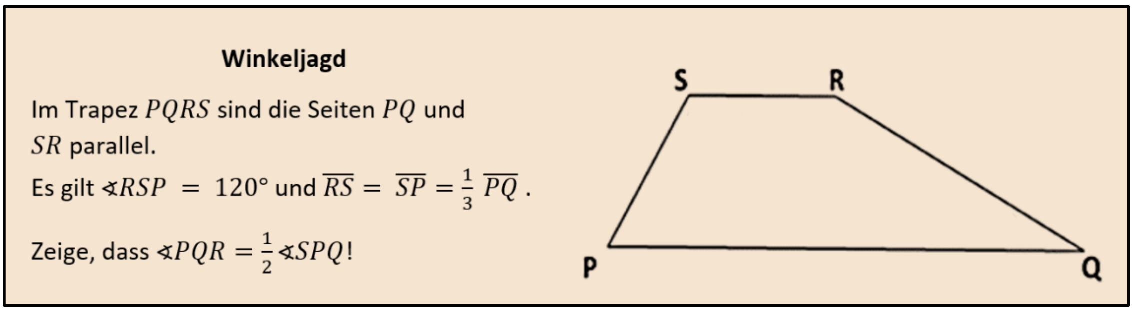


Abb. 23: Winkeljagd (vgl. Känguru der Mathematik 2015)

Aufgrund der Parallelität der beiden Trapezseiten lässt sich der Winkel bei P berechnen. Er beträgt 60°. Durch die Unterteilung der Strecke PQ in drei gleichlange Abschnitte der Länge $\overline{RS}$ bzw. $\overline{SP}$ lässt sich das Trapez in eine Raute, ein gleichseitiges und ein gleich-schenkliges

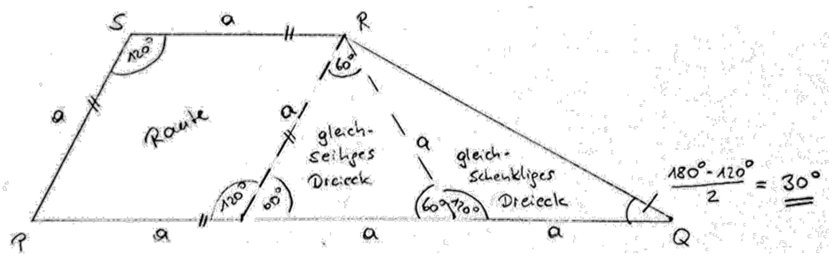


Abb. 24: Erfolgreiche Winkeljagd

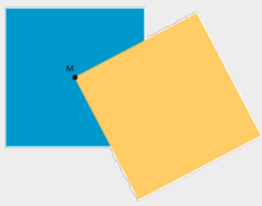
Dreieck zerlegen. Wenn man die Eigenschaften dieser Figuren nutzt, kann man daraus schließen, dass der Winkel bei Q 30° ist (Abb. 24).

Mithilfe dieser Aufgabe und einem entsprechenden Lösungsweg lässt sich nun genauer über das Ergänzen von Skizzen reflektieren. Man kann bei der Lösung eines Problems davon profitieren, wenn man besondere Vierecke oder Dreiecke finden kann, weil man ihre Eigenschaften (Seitenverhältnisse, Beziehungen zwischen Winkel, Satzgruppe von Pythagoras, Satz von Thales etc.) verwenden kann. Wie man in der Aufgabe *Unbestimmt! Oder doch nicht?* (Abb. 21) sieht, kann das Finden kongruenter Figuren bei der Lösungssuche behilflich sein. Auch das Einzeichnen ähnlicher Figuren kann den entscheidenden Hinweis liefern. Mit diesen expliziten Lösungsstrategien kann man Schüler*innen in die eigenständige Übungsphase entlassen.

Selbstständige Übungsphase

Um die Heuristik in den persönlichen Werkzeugkasten zu integrieren, folgt eine selbstständige Übungsphase, in der Schüler*innen Aufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen bearbeiten. In Abb. 25a ist eine Aufgabe mit geringem Komplexitätsgrad dargestellt. Durch das Auffinden kongruenter Dreiecke lässt sich schließen, dass die Überlappungsfläche ein Viertel des Inhaltes der gegebenen Quadrate beträgt. Die Lösung der Aufgabe in Abb. 25b erfordert einen mehrschrittigen Lösungsweg. Dabei ist der Satz von Thales sowie der Höhensatz hilfreich.

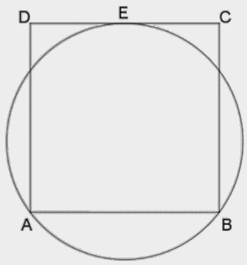
Zwei deckungsgleiche Quadrate überschneiden einander so, dass ein Eckpunkt des einen Quadrats im Mittelpunkt M des anderen liegt. Stell dir vor, das gelbe Quadrat lässt sich um den Punkt M drehen!



Zeige, dass der Inhalt der Überlappungsfläche gleich groß bleibt!

Abb. 25a: Aufgabe mit geringem Komplexitätsgrad (vgl. Roth 2018)

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Ein Kreis geht durch die Eckpunkte A und B sowie durch den Seitenmittelpunkt der Seite CD.



Zeige, dass der Durchmesser des Kreises um ein Viertel länger als die Seitenlänge des Quadrates ist!

Abb. 25b: Aufgabe mit hohem Komplexitätsgrad (vgl. Humenberger et al. 2020, S. 201)

Übertragung in andere mathematische Gebiete

Die Macht der Visualisierung lässt sich auch in anderen Gebieten der Mathematik nutzen. Beispielsweise können viele Terme durch geometrische Figuren oder Punktmuster dargestellt werden. Durch eine derartige Reflexion kann die Bedeutung der Heuristik für Schüler*innen ausgeweitet werden.

7 Fazit

Der Beweis ist kein sinnentleertes Ritual einer verstaubten Wissenschaft, er ist die vorherrschende epistemologische Methode der Mathematik. Er dient der Wissenssicherung, -kommunikation, -aneignung und -durchdringung. Er ist das Medium, das die deduktive Welt der Mathematik zusammenhält. Schüler*innen sollen diesen als sinnvoll und schön erleben. Vier didaktische Desiderate wurden identifiziert, um diese Sinnstiftung zu ermöglichen. Diese beziehen sich auf die Thematisierung von Akzeptanzkriterien mathematischer Begründungen, das Sichtbarmachen verschiedener Funktionen mathematischer Beweise, das Wecken mathematischer Neugier und die Ermöglichung beweisspezifischer Erfolgsmomente.

Im vorliegenden Artikel wurden konkrete Aktivitäten für die Umsetzung im Unterricht vorgeschlagen.

Der Vergleich und die Beurteilung vorliegender Argumente sollen Lernende dazu befähigen, zulässige von unzulässigen Argumenten zu unterscheiden (Abb. 2). Die Analyse eines fehlerhaften Beweisgesprächs ermöglicht es Schüler*innen, Zirkelschlüsse als solche zu erkennen (Abb. 3). Durch das Ordnen vorgebrachter Argumente zu einer schlüssigen Kette soll Lernenden der Aufbau mathematischer Beweise bewusst gemacht werden (Abb. 6).

An geeigneten Aufgaben lassen sich verschiedene Funktionen mathematischer Beweise im Unterricht sichtbar machen. Beweissprechakte (Abb. 7) stellen den Wahrheitsgehalt einer Aussage zur Debatte. Dadurch wird die Verifikationsfunktion betont. Inhaltlich-anschauliche Beweise können erklären, wieso eine Aussage allgemeingültig ist. Sie liefern eine Begründung für die in Frage stehende Aussage. Beweise schaffen Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Phänomenen. Manche Beweise laden zu weiteren Entdeckungen und Erkundungen ein. Moderierte Diskussionen über mathematische Vermutungen zeigen die Kommunikationsfunktion mathematischer Beweise auf (Abb. 12).

Durch entdeckendes Lernen kann eine emotionale Identifikation mit dem untersuchten Gegenstand, also auch Neugier entstehen. Auch die Erzeugung eines kognitiven Konflikts kann Neugier bei Schüler*innen hervorrufen. Unlösbare Probleme (Abb. 13) und *Ist das Zufall?* (Abb. 14) sind zwei Aufgabentypen, die das Potential haben, einen solchen Konflikt zu erzeugen.

Damit Schüler*innen eine positive Einstellung zur Tätigkeit des Beweisens entwickeln können, müssen sie diesbezügliche Erfolgsmomente erleben. Gegen das Vorurteil, Beweise seien zwingend komplex, abstrakt und nur für leistungsstarke Schüler*innen interessant, gilt es anzukämpfen. Manche Aussagen können durch das Anführen eines Beispiels bewiesen bzw. widerlegt werden. Für einige Begründungen reicht ein Rückgriff auf eine Definition aus. Die Darlegung dieser Fälle nimmt der Tätigkeit des Beweisens den ungerechtfertigten Schrecken (Abb. 15). Für die Erarbeitung komplexerer Beweise lassen sich sinnvolle Scaffolds etablieren. Bildsequenzen (Abb. 16) und Lückentexte (Abb. 17 & 18) geben Schüler*innen den nötigen Halt beim Formulieren eigener Argumente. Das eigenständige Finden und Führen mehrschrittiger Beweise erfordert oft eine zündende Idee. Für diesen Problemlöseprozess lassen sich geeignete Heuristiken erarbeiten.

Die hier vorgestellten Aktivitäten sollen einen kleinen Beitrag zum Aufbau von Beweiskompetenz und zur Entwicklung dementsprechender Einstellungen leisten. Die Wichtigkeit dieses Prozesses kann hier nicht besser als mit den Worten von Paul Lockhart (2002, S. 5) ausgedrückt werden:

> By concentrating on <u>what</u>, and leaving out <u>why</u>, mathematics is reduced to an empty shell. The art is not in the „truth“ but in the explanation, the argument. It is the argument itself which gives the truth its context, and determines what is really being said and meant. Mathematics is the <u>art of explanation</u>.“

Anerkennung

Mein großer Dank gilt Petra Hauer-Typpelt und Hans Humenberger für ihre wertvollen Anmerkungen zum Text. Diese haben den vorliegenden Artikel erheblich bereichert.

Literatur

Andelfinger, B. (1988): *Geometrie. Didaktischer Informationsdienst Mathematik.* Soest: Soester Verlagskontor.

Balacheff, N. (2009): Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In: Hanna, G., Jahnke, H. N. (Hrsg.): *Explanation and proof in mathematics.* (S. 115-135). New York: Springer.

Balacheff, N. (1990): Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education* 21, 258-272.

Bruder, R. (2011): *Problemlösen kann man im Mathematikunterricht lernen – aber wie?* Vortrag an der Universität Wien am 9. Mai 2011. Online: www.math-learning.com/files/110509w.pdf (Zugriff: 10.11.2020).

Bruder R., Grave B., Krüger U.-H., Meyer, D. (2017): *LEMAMOP. Lerngelegenheiten für Mathematisches Argumentieren, Modellieren und Problemlösen.* Braunschweig: Westermann.

Buchbinder, O., Zaslavsky, O. (2011): Is this a coincidence? The role of examples in fostering. *ZDM* 43(2), 269–281.

Büchter, A., Leuders, T. (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Cabassut, R., Conner, A. M., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N., Morselli, F. (2012): Conceptions of Proof - In Research and Teaching. In: Hanna, G., de Villiers, M. (Hrsg.) *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (S. 169-190). Dordrecht: Springer Netherlands.

Coe, R., Ruthven, K. (1994): Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal* 20, S. 41-53.

De Villiers, M. (1990): The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras* 24, 17-24.

Fischbein, K., Kedem, I. (1982): Proof and certitude in development of mathematical thinking. In: Vermandel, A. (Hrsg.): *Proceedings of the 6th PME Conference.* (S. 128-132). Antwerpen.

Hanna, G. (1990): Some pedagogical aspects of proof. *Interchange* 21, 6–13

Harel, G., Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education* 7, 234–283.

Healy, L., Hoyles, C. (2000): A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(4), 396-428. Online: https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG4/TG4_Heinze_cerme3.pdf (Zugriff: 27.05.2021).

Heinze, A., Reiss, K. (2004): Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In: Mariotti, M. A. (Hrsg.): *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Bellaria.

Hemmi, K. (2008): Students' encounter with proof: the condition of transparency. *ZDM* 40, 413–426.

Hemme, H. (2020): Hemmes Rätsel. Das triangulierte Rechteck. *spektrum.de.* Online: www.spektrum.de/raetsel/das-triangulierte-rechteck/1777413 (Zugriff: 27.05.2021).

Herbst, P., Brach, C. (2006): Proving and Doing Proofs in High School Geometry Classes: What Is It That Is Going on for Students? *Cognition and Instruction,* 24(1), S. 73-122.

Humenberger, H. (Hrsg.), Litschauer, D. Groß, H., Aue, V., Hasibeder, J., Himmelsbach, M., Schüller-Reichl, J. (2020): *Das ist Mathematik 4.* Wien: ÖBV

Jahnke, H. N. (1978): *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik. Beweisen als didaktisches Problem.* Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik.

Känguru der Mathematik (2015): Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7 – 8. Online: https://www.kaenguru.at/files/problems/2015_Kadett.pdf (Zugriff: 27.05.2021).

Krummheuer, G. (2003): Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *ZDM* 35(6), 247-256.

Kunimune, S., Fujita, T., Jones, K. (2009): "Why do we have to prove this?" Fostering Student' Understanding of "Proof" in Geometry in lower secundary School. In: Lin, F.-L., Hsieh, F.-J., Hanna, G., de Villier, M. (Hrsg.): *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. Volume 1.* (S. 256-261). Taipei.

Lockhart, P. (2002): *A Mathematician's Lament.* Online: www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf (Zugriff: 27.05.2021)

Manin, Y. (1977): *A Course in Mathematical Logic.* New York: Springer.

Meyer, M., Prediger, S. (2009): Warum? Argumentieren, Beweisen, Begründen (Vorversion). *Praxis der Mathematik im Unterricht* 51(30), 1-7. Online: www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/09-Meyer_Prediger_PM-H30-Argumentieren-Webversion.pdf (Zugriff: 27.08.2020).

Nelsen, R. B. (2016): *Beweise Ohne Worte.* Berlin: Springer.

Roth, J. (2008): *Überlappende Quadrate* (Aufgabenvariation). Online: www.juergen-roth.de/dynageo/ueberlappende_quadrate/ueberlappende_quadrate.html (Zugriff: 27.05.2021)

Senk, S. (1985): How Well Do Students Write Geometry Proofs? *The Mathematics Teacher* 78(6), 448-456.

Stein, M. (1999): Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 20(1), 3-27.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., Rudolph-Albert, F. (2009): Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. JMD 30(1), 30–54.

Vollrath, H. J. (1969): Dialogisches Lehren von Beweisen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 33-39.

Wille, A. M. (2009): Selbst erdachte Dialoge. *mathematik lehren,* 156, 22-26.

Winter, H. (1983): Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik* 4(1), 59-95.

Winter, H. (2016): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* (3., aktualisierte Aufl.) Wiesbaden: Springer.

Wittmann, G. (2014): Beweisen und Argumentieren. In: Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J. … Padberg, F. (Hrsg.): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1.* (2. verbesserte Aufl., S. 35-54). Berlin: Springer Spektrum.

Yackel, E., Cobb, P. (1996): Socio-mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education* 27(4), 458-477.

Verfasserin

Melanie Hunger
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar-Morgenstern-Platz 1
1090 Wien

melanie.anna.hunger@gmail.com